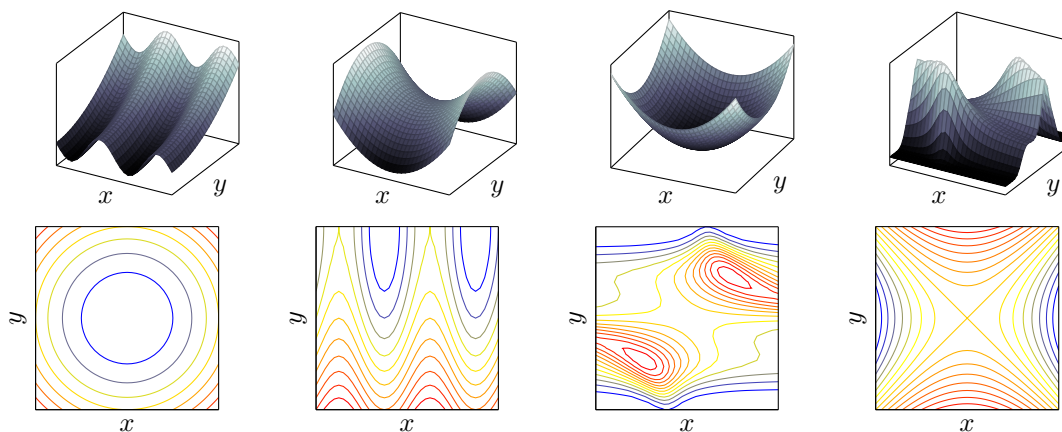


TD₂₀ – Fonctions de plusieurs variables**Exercice 1** **Lecture graphique** ★

Pour chacune des fonctions tracées ci-dessous, lui associer ses lignes de niveau.

**Exercice 2** ★

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer son ensemble de définition, justifier qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition, et calculer son gradient.

1. $a : (x, y) \mapsto x^2y + x^2y^2 + 2xe^y$
2. $b : (x, y) \mapsto e^x + e^y - e^{xy}$
3. $c : (x, y) \mapsto \ln(x^2 + y^4 + 2x^2y^2 + 3)$
4. $d : (x, y) \mapsto \cos(x + y) + \sin(x - y)$
5. $e : (x, y) \mapsto \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}$
6. $f : (x, y) \mapsto \frac{e^{xy}}{\cos(xy) + 2}$
7. $g : (x, y) \mapsto x \cos(y) + y \cos(x)$
8. $h : (x, y) \mapsto \arctan\left(\frac{x^2}{1 + y^2}\right)$
9. $i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xye^{-x^2+2y}$
10. $j : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto xye^z + xze^y + yxe^x$
11. $k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1^2 + \dots + x_n^2)e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)}$.

Exercice 3 ★

On définit f sur $\mathbb{R}^3$ par : $f(x, y, z) = \sin^2 x + \cos^2 y + z^2$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le développement limité d'ordre 1 de f en un point $A = (x_0, y_0, z_0)$.

Exercice 4 ★

1. Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(x, y) = (x - y, x + y)$ où $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Déterminer $\frac{\partial f \circ \varphi}{\partial x}$ et $\frac{\partial f \circ \varphi}{\partial y}$.
2. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F(x, y) = f(x + \varphi(y)).$$

Vérifier que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

Exercice 5 ★★★★★

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} & \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Montrer que $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, |f(x, y, z)| \leq |yz|$.
2. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice 6 Étude d'un extremum par variation de fonctions ★★

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

1. Montrer que f n'admet pas de maximum.
2. On se propose de montrer que f possède un minimum.
 - (a) En considérant $f(-x, -y)$, montrer qu'on peut se restreindre à $y \geq 0$.
 - (b) Pour $y \geq 0$ fixé, montrer que la fonction $x \mapsto f(x, y)$ admet un minimum noté $g(y)$.
 - (c) Étudier les variations de $y \mapsto g(y)$ et en déduire que f admet un minimum, et préciser le(s) point(s) où ce minimum est atteint.

Exercice 7 ★★

Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x, y) = e^x(x + y^2 + e^x)$. On considère également la fonction f , définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 1 + t + 2e^t$.

1. Montrer que g est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, et calculer ses dérivées partielles.
2. Montrer qu'il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0$. Justifier que $\alpha \in [-2, -1]$.
3. En déduire que g possède un unique point critique, que l'on exprimera en fonction de α .
4. Déterminer la nature locale de ce point critique
5. En remarquant que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $g(x, y) \geq g(x, 0)$, montrer que g possède un minimum global.

Exercice 8 ★★★★★

Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \sin x + y^2 - 2y + 1$ est $\mathcal{C}^1$ et qu'elle possède une infinité de points critiques.

Ces points critiques correspondent-ils à des extrema de f ?

Exercice 9 ★★★★★

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = (x + y + z)e^{-\frac{1}{6}(x^2 + y^2 + z^2)}$.

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$ et déterminer ses points critiques.
2. Montrer que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $|x + y + z| \leq \sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
3. En étudiant la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(t) = \sqrt{t}e^{-t/6}$, déterminer la nature des points critiques de f .

Exercice 10 ★★

Soit f la fonction définie sur $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$ par $f(x, y) = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y}$.

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert Ω , et calculer ses dérivées partielles premières et secondes.
2. Déterminer les points critiques de f .
3. Montrer que f admet un extremum local sur Ω .

Exercice 11 ★★

Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes :

1. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 + xy + y^3$.
2. $g : (\mathbb{R}^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = 4xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.
3. $h : (\mathbb{R}_+^*)^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{x+y}$.

Exercice 12 ★★

Soit $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy + xy^3$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle admet un unique point critique.
2. Déterminer les valeurs propres de la hessienne en ce point critique. Peut-on conclure quant à la nature de ce point critique ?
3. Étudier les signes de $f(x, x)$ et $f(x, -x)$, et conclure.

Exercice 13 ★★

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$, et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.
2. Montrer que f admet exactement cinq points critiques, dont le point $(0, 0, 0)$.
3. Déterminer la matrice hessienne de f en $(0, 0, 0)$, et en déduire que f possède un minimum local en $(0, 0, 0)$. Est-ce un minimum global de f ?
4. Pour chacun des autres points critiques, vérifier que 4 est valeur propre de la matrice hessienne, et déterminer si f admet ou non un extremum local en ce point.

Exercice 14 ★★★

Soit f la fonction définie sur l'ouvert $(\mathbb{R}_+^*)^2$ par $f(x, y) = x \ln y - y \ln x$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer son gradient.
2. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(t) = \ln t - t + \frac{1}{t}$.
Montrer que si (x, y) est un point critique de f , alors $\varphi(\ln y) = 0$.
3. En étudiant le sens de variations de φ , montrer que f possède un unique point critique (x_0, y_0) .
4. Montrer que pour $\alpha \in [0, 1[$, $f(x_0 + \alpha, y_0 - \alpha) = -f(x_0 - \alpha, y_0 + \alpha)$. f admet-elle un extremum local sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$?

Exercice 15 ★★★

Soit $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 \leq y \leq 1 - x^2\}$, et soit $\mathcal{D}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 1 < y < 1 - x^2\}$.

On admet que $\mathcal{D}$ est fermé, que $\mathcal{D}_0$ est ouvert, et que tous les deux sont bornés.

Soit f la fonction définie sur $\mathcal{D}$ par $f(x, y) = y^2 - x^2y + x^2$.

1. Justifier que f possède un maximum M et un minimum m .
2. Déterminer les points critiques de f sur $\mathcal{D}_0$.
3. Étudier les fonctions $x \mapsto f(x, x^2 - 1)$ et $x \mapsto f(x, 1 - x^2)$, et en déduire les valeurs de m et M .

Exercice 16 ★★★

Soit $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ et soit f la fonction définie sur $\mathcal{D}$ par $f(x, y) = x^3 - 3x(1 + y^2)$.

1. Justifier que f admet un minimum m et un maximum M sur $\mathcal{D}$.
2. Montrer que sur $B(0, 1)$, f n'admet pas de point critique. Que peut-on en déduire à propos de m et M ?
3. En étudiant la fonction $t \mapsto f(\cos t, \sin t)$, déterminer les valeurs de m et M .

Exercices issus d'oraux

Exercice 17 ★★★★★

(Oral 2008)

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et soit $g : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = \frac{1}{x} \int_x^{xy} f(t) dt$.

1. Montrer que la fonction g est prolongeable par continuité sur $\mathbb{R}^2$
2. La fonction ainsi prolongée est-elle de classe $\mathcal{C}^1$? de classe $\mathcal{C}^2$?

Exercice 18 ★★★★★

(Oral 2011)

Déterminer les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ telles que

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

On pourra poser $u = \frac{x}{y}$ et $v = xy$.

Exercice 19 ★★★

(Oral 2011)

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et F définie par $F(x, y) = \int_{-x}^y e^{x+t} f(2x+t) dt$.

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, on pourra poser un changement de variable.
2. Déterminer f pour que F soit solution de l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial F}{\partial x} - 4 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + F = 1$.

Exercice 20 ★★

(Oral 2016)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^3 - 3x(1 + y^2)$.

1. Étudier l'existence d'extréma de f .
2. Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq 2\}$. Étudier les extremas de f sur D .

Exercice 21 ★★★★★

(Oral 2015, 2016, 2018)

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, justifier la convergence de l'intégrale $F(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (t-x)^2 (t-y)^2 e^{-t^2} dt$

2. On donne

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^4 e^{-t^2} dt = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

Montrer que, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $F(x, y) = x^2 y^2 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + 4xy) + \frac{3}{4}$

3. Déterminer les points critiques de F et étudier leurs natures.